NOTIZEN

Bemerkung zur Abhängigkeit vom Gitterzellenvolumen bei Berechnung der Zweipunktfunktion in der Quantenmechanik mittels funktionaler Integration

M. Hoffmann

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Leipzig, 701 Leipzig, Linnéstraße 5

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1465—1466 [1967]; eingegangen am 9. Juli 1967)

Die in einer früheren Arbeit [1] behandelte Methode zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Gitterzellenvolumen bei Berechnung der Zweipunktfunktion für die quantenmechanischen Potentiale

$$V(x) = \lambda\,|x|^p, \qquad \lambda > 0, \quad p > 0 \tag{1}$$

mittels funktionaler Integration läßt sich auch bei den Potentialen

$$V(x) = \lambda\,|x|^p = -\lambda'\,|x|^{-p'}, \;\; \lambda = -\lambda' < 0, \quad p = -p' < 0 \tag{2}$$

anwenden. Die hierbei auftretenden Integrale erhalten durch Regularisierung [2] einen Sinn. Die zur Berechnung der M_r und f_r [1] erforderlichen Integrale

$$\int_0^\infty x^{r'}\, e^{-i\varepsilon V(x)} = \int_0^\infty x^{r'} \exp\{i\,\varepsilon\,\lambda'\,x^{-p'}\}\,, \quad r' \geqq 0 \tag{3}$$

werden durch Substitution in

$$\int_0^{-i\infty} e^{-t}\, t^{-(r'+1)/p'-1}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

überführt. Für dieses Integral kann man

$$\int_0^{-i\infty} t^{\tau-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{-i\infty} t^{\tau-1} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{d}t \tag{5}$$

mit $-n-1 < \tau < -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ schreiben [2], woraus man durch Deformation des Integrationsweges auf der rechten Seite

$$\int_0^{-i\infty} t^{\tau-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{\tau-1} \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}\right) \mathrm{d}t = \Gamma(\tau) \tag{6}$$

mit $-n-1 < \tau < -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ erhält. Insgesamt ergeben sich die Relationen

$$\int_0^\infty x^{r'} \exp\{i\,\varepsilon\,\lambda'\,x^{-p'}\}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{p'}\,(-i\,\varepsilon\,\lambda')^{(r'+1)/p'}\,\Gamma(-(r'+1)/p')\,,\;\; (r'+1)/p' \neq 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

und

$$M_r = (-i\,\varepsilon\,\lambda')^{2r/p'} \cdot \Gamma(-(2\,r+1)/p') / \Gamma(-1/p')\,. \tag{8}$$

Wegen der Singularitäten der Γ-Funktion treten in (7) entsprechend der dort gemachten Einschränkungen nur dann endliche Ausdrücke auf, wenn $(r'+1)/p'$ keine ganze positive Zahl oder nicht Null ist. Wegen des Quotienten ist in manchen Fällen Gl. (8) auch für die ausgeschlossenen Werte des Argumentes der Γ-Funktion endlich, wie man z. B. für $p' = 1$ oder $p' = \frac{1}{2}$ mit Hilfe von $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ zeigen kann. In anderen Fällen divergiert M_r, was sowohl für ganze p' (z. B. $p' = 3$, $r = 1$) als auch für gebrochene rationale p' (z. B. $p' = 7/3$, $r = 3$) passieren kann. Insgesamt erkennt man, daß für gewisse Werte von p' (z. B. $p' = 4$) alle M_r und damit alle f_r und a_j [1] endlich sind, bei anderen p'-Werten (z. B. $p' = 7/3$) werden einige M_r und damit einige f_r und a_j unendlich.

[1] M. Hoffmann, Z. Naturforschg. **22 a**, 1198 [1967].
[2] I. M. Gelfand u. G. E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960, S. 61.

In den Fällen, wo alle M_r endlich sind, betrachten wir jetzt die ε-Abhängigkeit der Zweipunktfunktion. Für α^1 und entsprechend für β und γ ergibt sich

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, m^{j-1} \lambda'^{2j/p'} (-i\,\varepsilon)^{2j/p'-j+2}, \tag{9}$$

woraus man durch Umordnung

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^2\,\varepsilon^2 A_\nu}{m} \left[\left(1 + \left(\frac{m\,\lambda'^{2/p'}}{(-i\,\varepsilon)^{-2/p'+1}} \right)^{\nu} \right)^{2/[\nu(-2/p'+1)]} - 1 \right] \tag{10}$$

erhält, wobei die Zahlenfaktoren A_ν durch die Zahlenfaktoren a_j bestimmt sind. Zum Zwecke des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$ formen wir (10) um in

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ A_\nu \left[\frac{(-i\,\varepsilon)^{\nu(-2/p'+1)}}{m^{\nu/2\cdot(-2/p'+1)}} + \frac{m^\nu \lambda'^{2\nu/p'}}{m^{\nu/2\cdot(-2/p'+1)}} \right]^{2/[\nu(-2/p'+1)]} - \frac{i^2\,\varepsilon^2 A_\nu}{m} \right\}. \tag{11}$$

Für $-2/p'+1>0$, d. h. für $p'>2$, läßt sich der Grenzübergang ausführen und ergibt

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \, \lambda^{4/(p'-2)} \, m^{(p'+2)/(p'-2)}, \tag{12}$$

also einen ε-unabhängigen, reellen Ausdruck.

Für $-2/p'+1<0$, d. h. für $0<p'<2$, bewirkt der erste Term in (11), daß jeder Summand verschwindet, genau wie in (9), so daß obige Umordnung von (9) nicht zum Ziel führt. Das hängt damit zusammen, daß für $0<p'<2$ in (9) nur positive Exponenten von ε auftreten.

Die Fälle $p'=0$ und $p'=2$ bedürfen einer gesonderten Behandlung, wobei für $p'=2$ in (9) ebenfalls nur positive Exponenten von ε auftreten, und zwar immer der Exponent 2.

Herrn Prof. G. Heber und Herrn Dr. A. Kühnel bin ich für ihr Interesse und für ihre Diskussionsbeiträge zu Dank verpflichtet.

Zur akustischen Dispersion in dünnen zylindrischen Stäben

H. Gehm und G. Liedtke

I. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1466—1468 [1967]; eingegangen am 30. Mai 1967)

The risetime of a piezoelectric transducer is mainly affected by the acoustical dispersion in the elastic rod mounted before the piecoelectric element. The aim of this paper firstly is the calculation of the proportionality factor in the Baganoff formula of risetime. Secondly we shall prove the so completed formula experimentally. Theory and experiments are in a good agreement.

Das Sondensignal in piezoelektrischen Drucksonden ergibt sich durch Faltung des Eingangssignals mit den Verzerrungsfunktionen des Druckleiters und des Piezoplättchens. Nimmt man an, daß die Länge des Druckleiters groß ist im Vergleich zur Länge des Piezoplättchens, so erfolgt die Verzerrung im wesentlichen im Druckleiter. Die Anstiegszeit des Sondensignals ergibt sich dann in erster Näherung als Summe der Anstiegszeit des Signals am Ende des Druckleiters und der Laufzeit im Piezoplättchen. Ist das Eingangssignal eine Sprungfunktion, so erhält man für die Gesamtanstiegszeit $\tau = \tau_D + \tau_P$ mit $\tau_D \gg \tau_P = d/c_P$ (d = Dicke der Piezoschicht, c_P = Schallgeschwindigkeit im Plättchen). Die Größe τ_D ist nur durch die elastischen und geometrischen Eigenschaften des Druckleiters bestimmt. Zu ihrer Berechnung greifen wir auf eine Arbeit von Skalak [1] zurück, die die Verzerrung eines Drucksprunges in einem dünnen zylindrischen Stab behandelt.

Betrachtet wird ein Stab der Länge L und des Durchmessers D mit $L > 20\,D$. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Stabachse mit der z-Achse zusammenfällt. Zur Zeit $t=0$ tritt an der Stelle $z=0$ ein Drucksprung auf. Die damit verbundene Verzerrung pflanzt sich im Stab fort. Für die Punkte konstanter Verzerrung u_z = const. leitet Skalak folgendes Weg-Zeit-Gesetz her:

$$z' = \alpha(u)\,(3\,d\,t)^{1/3} \tag{1}$$

mit $$z' = z - c_l\,t, \quad d = \tfrac{1}{16}\,\nu^2 D^2 c_l,$$

$(E/\varrho)^{1/2} = c_l$, ν = Poisson-Zahl. Die Funktion $\alpha(u)$ wurde von Skalak numerisch berechnet. Ihr Verlauf ist in Abb. 1 dargestellt. Definiert man die Anstiegszeit als Spanne zwischen 5% und 100% der maximalen Verzerrungsamplitude, so erhält man für große Laufzeiten $(z \gg z')$

$$\tau_D = c_l^{-1}\,(z'(u_{\max}, t_1) - z'(0{,}05\,u_{\max}, t_1))$$

[1] R. Skalak, J. Appl. Mech. **24**, 59 [1957].